BIG FAT NOTEBOOK

ALLES, WAS DU FÜR MATHE BRAUCHST

DAS GEBALLTE WISSEN VON DER 5. BIS ZUR 9. KLASSE

MIT DEN COOLSTEN TIPPS DER CLEVERSTEN KIDS!

Loewe

Unverkäufliche Leseprobe

FSC
www.fsc.org
MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C109273

ISBN 978-3-7432-0416-4

1. Auflage 2019

Erstmals in den USA unter dem Originaltitel *EVERYTHING YOU NEED TO ACE MATH IN ONE BIG FAT NOTEBOOK: The Complete Middle School Study Guide* erschienen.

Published by arrangement with Workman Publishing Co., Inc., New York

Aus dem Englischen übersetzt von David Frühauf

Umschlaggestaltung: Ramona Karl

Printed in the EU

www.loewe-verlag.de

BIG FAT NOTEBOOK

ALLES, WAS DU FÜR MATHE BRAUCHST

DAS GEBALLTE **WISSEN** VON DER 5. BIS ZUR 9. KLASSE

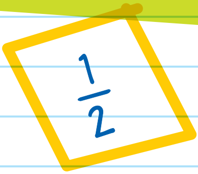
Loewe

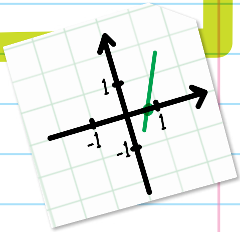
ALLES, WAS DU BRAUCHST, UM EIN MATHE-GENIE ZU WERDEN

HI!

Das hier sind die Notizen aus meinem Matheunterricht. Wer ich bin? Ich will ja nicht angeben, aber ich bin ein echtes Mathe-Genie.

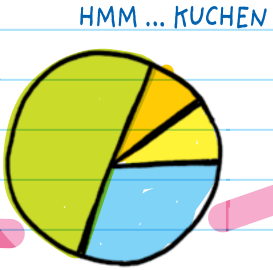
Hier habe ich alles aufgeschrieben, was du brauchst, um genauso ein MATHE-Crack zu werden, angefangen bei **BRÜCHEN** bis hin zum **KOORDINATENSYSTEM**, und ansonsten einfach alles, was du sonst so für die kommenden Mathearbeiten brauchst.





Damit du dich hier zurechtfindest, habe ich alles strukturiert:

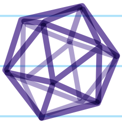
- Fachbegriffe sind GELB hervorgehoben.
- Infokästen sind grün markiert.
- Für wichtige Textstellen habe ich einen **BLAUEN STIFT** verwendet.
- Und zum Vergleich von Daten und Zahlen setze ich Kuchendiagramme, Tabellen und andere Zeichnungen ein.

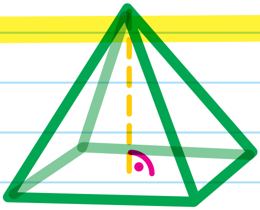


Wenn du selbst zu faul bist, dir Aufzeichnungen im Unterricht zu machen, wird dir dieses Notizbuch sehr nützlich sein. Darin findest du alles Wichtige für den Matheunterricht. (Und sollte dein Lehrer doch mal über etwas reden, was hier nicht drinsteht, schreib es am besten einfach dazu.)

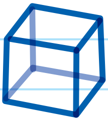
Ich brauche dieses Notizbuch jetzt nicht mehr, denn ich bin ja bereits ein Mathe-Genie. Betrachte es nun als DEINES. Es wird dir garantiert helfen, auch DEINEN Matheunterricht zu meistern!

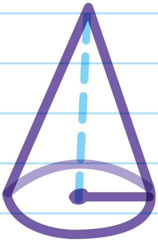
INHALT



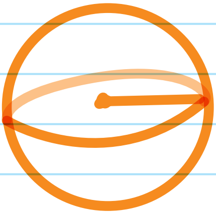


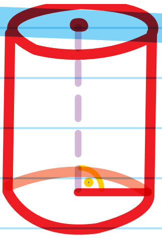
LEKTION 2: VERHÄLTNISSE, DIREKTE PROPORTIONALITÄT, PROZENTRECHNUNG 93

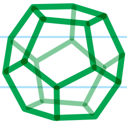




LEKTION 3: TERME und GLEICHUNGEN 165







LEKTION 5: STATISTIK und WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG 353

LEKTION 6: Das KOORDINATENSYSTEM und FUNKTIONEN 403


GIBT ES HIER EIGENTLICH IRGENDWO KÄSE?

Lektion 1

Das Zahlensystem

Kapitel 1

Die ZAHLENMENGEN und der ZAHLENSTRAHL

Es gibt verschiedene Arten von Zahlenmengen mit unterschiedlichen Namen. Am häufigsten werden die folgenden Zahlenmengen verwendet:

NATÜRLICHE ZAHLEN: Das sind Zahlen ohne Bruch oder Dezimalstelle (Nachkommastelle) ab 1 aufwärts. Manche zählen auch die 0 dazu. Man kann mit ihnen zählen.

BEISPIELE: 0, 1, 2, 3, 4...

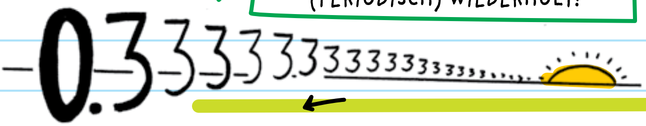
GANZE ZAHLEN: Zahlen ohne Bruch oder Dezimalstelle, die kleiner, gleich oder größer als 0 sind.

BEISPIELE: –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4...

RATIONALE ZAHLEN: Dies sind natürliche Zahlen und ganze Zahlen sowie Brüche und Dezimalzahlen, also Zahlen mit Ziffern nach einem Komma – wobei diese Ziffern entweder endlich sind, also irgendwann abbrechen, oder periodisch sind, d. h., sie sind unendlich, wiederholen sich aber andauernd. Solche abbrechenden oder periodischen Dezimalzahlen lassen sich immer auch als Brüche darstellen und umgekehrt. Es gibt positive und negative rationale Zahlen.

BEISPIELE: $\frac{1}{2}$ (entspricht $0{,}5$), $0{,}25$ (entspricht $\frac{1}{4}$), -7 (entspricht $\frac{-7}{1}$), $4{,}12$ (entspricht $\frac{412}{100}$), $\frac{1}{3}$ (entspricht $0{,}\overline{3}$)

DER STRICH ÜBER DER 3 BEDEUTET, DASS SICH DIESE ZIFFER UNENDLICH (PERIODISCH) WIEDERHOLT!



IRRATIONALE ZAHLEN: Das sind Zahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen, deren Reihenfolge sich nie wiederholt. Irrationale Zahlen lassen sich nicht als Brüche darstellen.

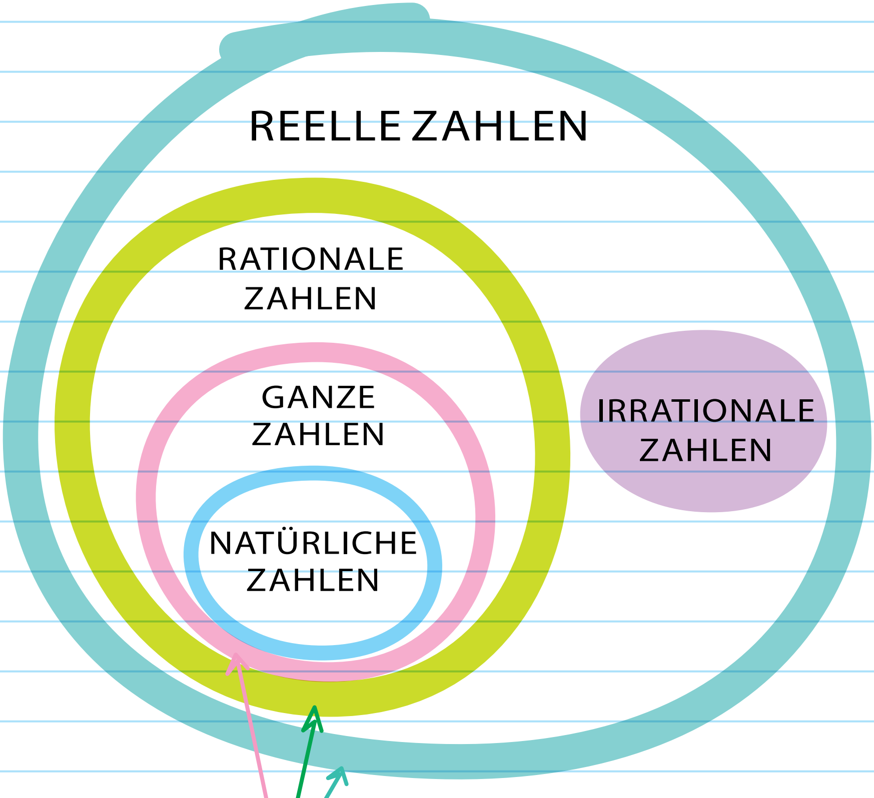
(„…“ BEDEUTET, DASS DIESE ZAHL UNENDLICH WEITERGEHT.)

BEISPIELE: $3{,}14159265\ldots$, $\sqrt{2}$

REELLE ZAHLEN: Das sind sowohl die rationalen wie auch die irrationalen Zahlen. Außerdem zählen die natürlichen und die ganzen Zahlen dazu.

BEISPIELE: 5, −17, 0,312, $\frac{1}{2}$, π, $\sqrt{2}$ usw.

Hier siehst du alle Zahlenmengen im Überblick:



BEISPIEL: −2 ist eine ganze Zahl, eine rationale Zahl und eine reelle Zahl!

NOCH EIN PAAR BEISPIELE:

46 gehört zu den natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen.

0 gehört zu den ganzen, den rationalen und den reellen Zahlen.

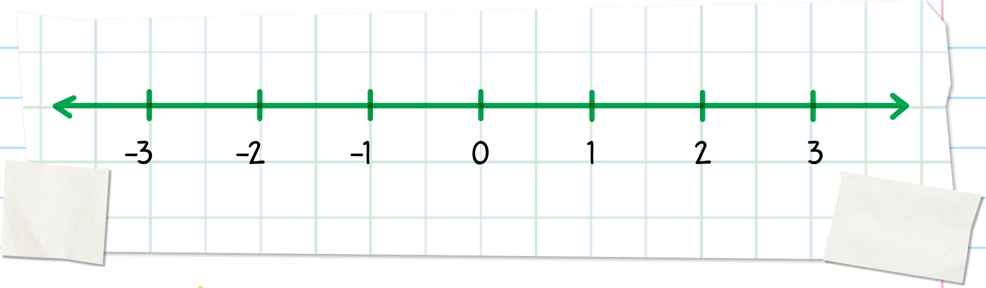
$\frac{1}{4}$ gehört zu den rationalen und reellen Zahlen.

$6{,}675$ gehört zu den rationalen und reellen Zahlen. (ABBRECHENDE DEZIMALZAHLEN sind rational.)

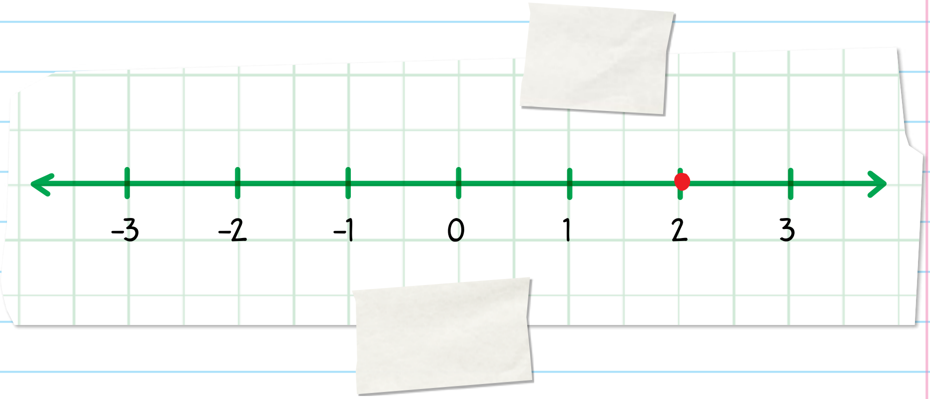
$\sqrt{5} = 2{,}2360679775...$ gehört zu den irrationalen und reellen Zahlen. (Dezimalzahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen sind irrational.)

RATIONALE ZAHLEN UND DER ZAHLENSTRAHL

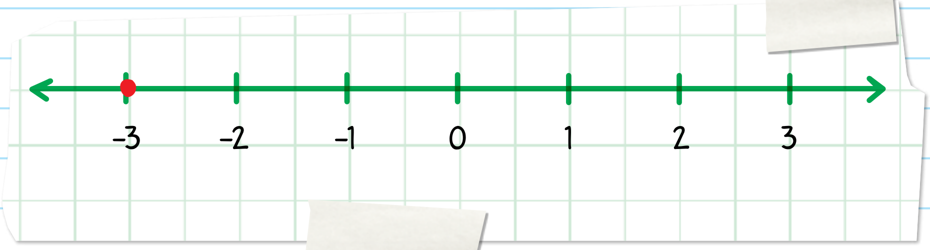
Alle rationalen Zahlen können auf einem ZAHLENSTRAHL dargestellt werden. Ein Zahlenstrahl ist eine Linie, mit deren Hilfe man Zahlen ordnet und vergleicht. Kleinere Zahlen stehen auf der linken Seite und größere auf der rechten Seite.



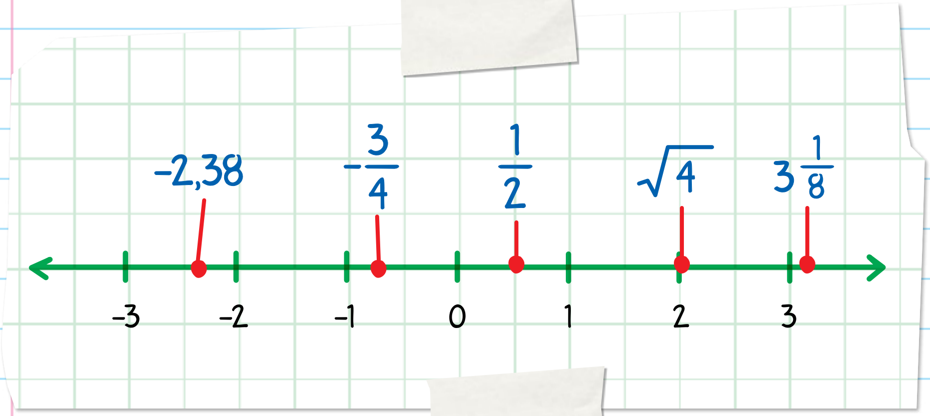
BEISPIEL: Weil die 2 größer als 1 ist und auch größer als 0, wird sie rechts von diesen Zahlen platziert.

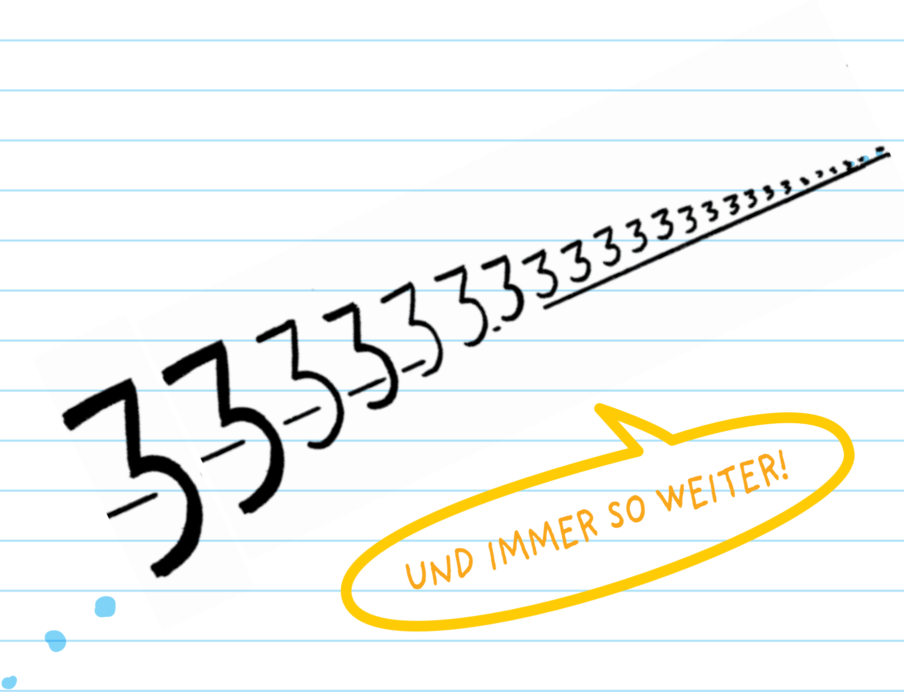


BEISPIEL: Weil dementsprechend −3 kleiner ist als −2 und auch kleiner als −1, wird sie links von diesen Zahlen platziert.



BEISPIEL: Wir können nicht nur ganze Zahlen auf einem Zahlenstrahl anordnen, sondern auch Brüche, Dezimalzahlen und alle anderen rationalen Zahlen:




UND IMMER SO WEITER!

PRÜFE DEIN WISSEN

Ordne bei den Aufgaben 1 bis 8 jeder Zahl so viele Kategorien wie möglich zu.

1. -3

2. $4{,}\overline{5}$

3. $-4{,}89375872537653487287439843098\ldots$

4. $-9{,}7654321$

5. 1

6. $-\frac{9}{3}$

7. $\sqrt{2}$

8. $5{,}\overline{678}$

9. Steht $\frac{1}{45}$ auf dem Zahlenstrahl links oder rechts von 0?

10. Steht $-0{,}001$ auf dem Zahlenstrahl links oder rechts von 0?

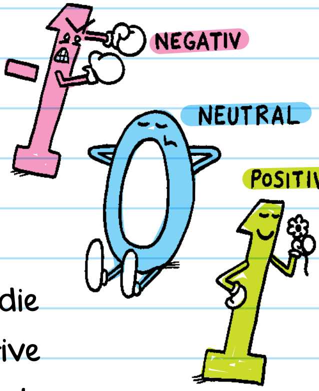
LÖSUNGEN

LÖSUNGEN

1. Ganze Zahl, rational, reell
2. Rational, reell
3. Irrational, reell
4. Rational, reell
5. Natürlich, ganz, rational, reell
6. Ganze Zahl, rational, reell (weil $-\frac{9}{3}$ auch als -3 geschrieben werden kann)
7. Irrational, reell
8. Rational, reell
9. Rechts von 0
10. Links von 0

Kapitel 2

POSITIVE und NEGATIVE ZAHLEN

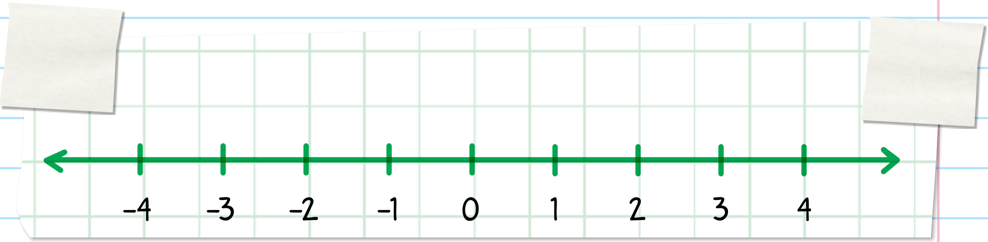


POSITIVE ZAHLEN verwendet man, um Mengen zu beschreiben, die größer als null sind, und NEGATIVE ZAHLEN werden verwendet, um Mengen zu beschreiben, die kleiner als null sind. Beide zusammen bilden gemeinsam mit der Null die GANZEN ZAHLEN. Häufig werden positive und negative Zahlen gemeinsam verwendet, um Mengen darzustellen, die entgegengesetzte Richtungen oder Werte besitzen.

MERKE:
Alle positiven und negativen Zahlen (ohne Brüche und Dezimalstellen) sind ganze Zahlen.

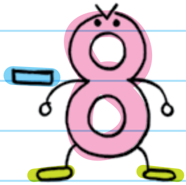
Alle positiven Zahlen sehen einfach wie ganz normale Zahlen aus (+4 und 4 bedeuten dasselbe). Alle negativen Zahlen haben ein Minus als Vorzeichen vorangestellt, also so: −4.

Ganze Zahlen lassen sich auf einem Zahlenstrahl darstellen. Wenn du alle ganzen Zahlen auf einem Zahlenstrahl anordnen würdest, läge 0 genau in der Mitte, weil 0 weder positiv noch negativ ist.

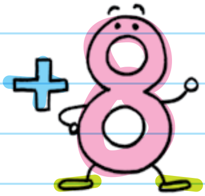


Positive und negative Zahlen braucht man im Alltag häufig, z. B. hierfür:

NEGATIV



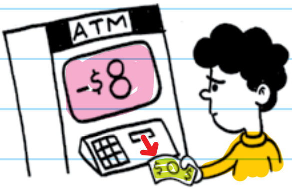
POSITIV



Schulden
(Geld, das du jemandem schuldest)

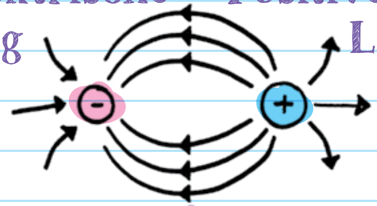
Ersparnisse
(Geld, das du auf deinem Sparkonto hast)

Geldabhebung



Geldeinzahlung

Negative elektrische Ladung



Positive elektrische Ladung

Minustemperaturen

Plustemperaturen

Unterhalb des Meeresspiegels

Oberhalb des Meeresspiegels

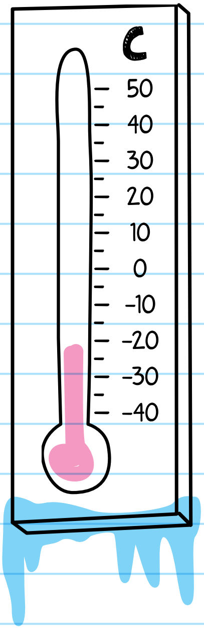
Auf einem horizontalen Zahlenstrahl sind die Zahlen auf der linken Seite von 0 negativ und die Zahlen auf der rechten Seite positiv. Zahlen werden größer, je weiter sie nach rechts wandern, und kleiner, je weiter sie nach links wandern. Wir malen einen PFEIL an jedes Ende eines Zahlenstrahls, um zu zeigen, dass die Zahlen dort weitergehen (bis zur UNENDLICHKEIT!).

UNENDLICHKEIT:
etwas, das endlos,
also ohne Ende ist.

DAS SYMBOL FÜR DIE UNENDLICHKEIT IST ∞.

Eine Zahl mit einem anderen VORZEICHEN nennt man GEGENZAHL. Zu jeder positiven Zahl gibt es eine negative Gegenzahl. Zur 5 ist das beispielsweise die Gegenzahl −5. Und zu jeder negativen Zahl gibt es eine positive Gegenzahl (zu −4 ist das die 4). Zahl und Gegenzahl haben auf einem Zahlenstrahl jeweils den gleichen Abstand zur 0, sie haben den gleichen BETRAG.

Auf einem vertikalen Zahlenstrahl (wie z. B. bei einem Thermometer) sind die Zahlen über 0 positiv und die unter 0 negativ.



BEISPIEL: Was ist die Gegenzahl zu 8?

-8

BEISPIEL: Ben leiht sich von seinem Freund Torben 2 €. Stell Bens neues Vermögen als ganze Zahl dar.

-2

Übrigens ist die GEGENZAHL DER GEGENZAHL die Zahl selbst!

BEISPIEL: Was ist die Gegenzahl der Gegenzahl von -16?

Die Gegenzahl von -16 ist 16. Die Gegenzahl von 16 ist -16.

Also ist die Gegenzahl der Gegenzahl von -16 ganz klar -16 (also dieselbe Zahl).


DU HAST GESAGT, ICH DARF INS KINO GEHEN!
HAB ICH DAS?


NA JA, DU HAST NICHT GESAGT, DASS ICH NICHT GEHEN DARF.
WOHL ZU OFT DIE GEGENZAHL DER GEGENZAHL BERECHNET, WAS?

PRÜFE DEIN WISSEN

Notiere für die Aufgaben 1 bis 5 die ganzen Zahlen mit passenden Vorzeichen.

1. Ein U-Boot ist 60 Meter unter dem Meeresspiegel.

2. Ein Hubschrauber ist 160 Meter über dem Landeplatz.

3. Die Temperatur ist 8 Grad unter null.

4. Merle schuldet ihrem Freund Maik 17 €.

5. Maik hat 550 € auf seinem Sparkonto.

6. Markiere die Position der Gegenzahl von 2 auf dem Zahlenstrahl.

7. Was ist die Gegenzahl von -100?

8. Zeichne einen Zahlenstrahl, der sich von -3 bis 3 erstreckt.

9. Was ist die Gegenzahl der Gegenzahl von 79?

10. Was ist die Gegenzahl der Gegenzahl von -47?

LÖSUNGEN

LÖSUNGEN

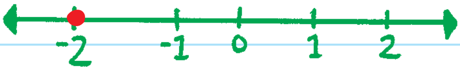
1. -60

2. +160 (oder 160)

3. -8

4. -17

5. +550 (oder 550)

6. 

7. 100

8. 

9. 79

10. -47

Kapitel 3

Der BETRAG

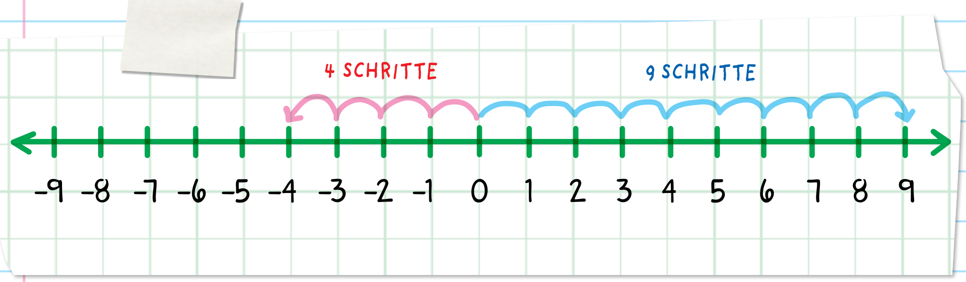
Der BETRAG (auch: Absolutbetrag) einer Zahl ist ihre Distanz zur 0 (auf dem Zahlenstrahl). Der Betrag ist immer positiv. Wir markieren den Betrag durch zwei Balken links und rechts von der Zahl.

BEISPIEL: $|-4|$

$|-4|$ liest man als „der Betrag von -4". Weil -4 auf dem Zahlenstrahl 4 Schritte von null entfernt ist, ist der Betrag 4.

BEISPIEL: $|9|$

$|9|$ liest man als „der Betrag von 9". Weil 9 auf dem Zahlenstrahl 9 Schritte von null entfernt ist, ist der Betrag 9.



Die Betragsbalken können auch Rechenaufgaben beinhalten. Um den Betrag zu erhalten, musst du zunächst die Aufgabe zwischen den Betragsbalken lösen.

BEISPIEL: $|5-3| = |2| = 2$

Manchmal stehen auch positive oder negative Vorzeichen vor den Betragsbalken. Merke: Erst innerhalb, dann außerhalb – nimm zuerst den Betrag, der innerhalb der Balken steht, und wende dann das außerhalb liegende Vorzeichen an.

BEISPIEL: $-|6| = -6$

(Der Betrag von 6 ist 6. Füge nun das negative Vorzeichen hinzu, um die Lösung -6 zu erhalten.)

BEISPIEL: $-|-16| = -16$

(Der Betrag von -16 ist 16. Anschließend wenden wir das negative Vorzeichen, das außerhalb der Betragsbalken steht, an, um die Lösung -16 zu erhalten.)

Steht eine Zahl direkt vor den Betragsbalken, müssen wir multiplizieren – genauso, wie wenn eine Zahl direkt vor einer Klammer stünde.

BEISPIEL: $2|-4|$ (Der Betrag von -4 ist 4.)

$2 \cdot 4 = 8$ (Hast du erst einmal den Betrag, kannst du die Rechnung wie gewohnt lösen.)

Malnehmen oder Multiplizieren lässt sich auf verschiedene Arten darstellen – hier wird jeweils 2 mit 4 multipliziert:

$$2 \times 4 = 8$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

$$(2)(4) = 8$$

$$2(4) = 8$$

Wenn du **VARIABLEN** verwendest, die miteinander oder mit einer Zahl multipliziert werden sollen, kannst du sie direkt nebeneinanderstellen:

$$ab = 8$$

$$3x = 15$$

VARIABLE: ein Buchstabe, der anstelle einer Zahl verwendet wird, die man noch nicht kennt.

Ich ♥ ganze Zahlen

PRÜFE DEIN WISSEN

Werte die Aufgaben 1 bis 8 aus.

1. $|-19|$

2. $|49|$

3. $|-4{,}5|$

4. $\left|-\frac{1}{5}\right|$

5. $|7-3|$

6. $|1\cdot 5|$

7. $-|65|$

8. $-|-9|$

9. Elias hat einen Kontostand von −56,50 €. Wie hoch ist der Betrag seiner Verschuldung?

10. Ein Tal liegt 29 Meter unterhalb des Meeresspiegels. Welchen Betrag hat die Höhendifferenz zwischen dem Tal und dem Meeresspiegel?

LÖSUNGEN

LÖSUNGEN

1. 19
2. 49
3. 4,5
4. $\frac{1}{5}$
5. 4
6. 5
7. -65
8. -9
9. 56,50
10. 29

Kapitel 4

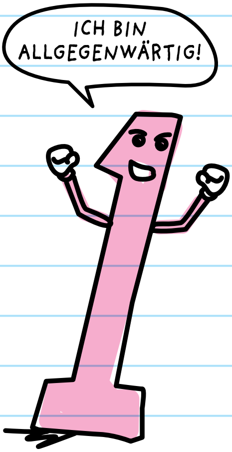
TEILER und GRÖSSTER GEMEINSAMER TEILER

Wenn man eine Zahl a durch eine Zahl b ohne Rest teilen (dividieren) kann, sagt man, dass b der TEILER von a ist.

BEISPIEL: Wie lauten die Teiler von 6?

2 ist Teiler von 6, denn $6 : 2 = 3$
3 ist Teiler von 6, denn $6 : 3 = 2$
1 ist Teiler von 6, denn $6 : 1 = 6$
6 ist Teiler von 6, denn $6 : 6 = 1$

Die Teiler von 6 sind also 1, 2, 3 und 6.



Um die Teiler einer Zahl herauszufinden, könntest du auch fragen: Welche Zahlen muss ich miteinander malnehmen (multiplizieren), damit ich diese Zahl als Produkt erhalte?

Jede Zahl, die größer ist als 1, besitzt mindestens zwei Teiler, weil jede Zahl durch 1 wie auch durch sich selbst geteilt werden kann.

BEISPIEL: Wie lauten die Teiler von 10?
(Überlege: Was kann ich miteinander multiplizieren, damit ich als Produkt 10 erhalte?)

$1 \cdot 10 = 10$
$2 \cdot 5 = 10$

Die Teiler von 10 sind 1, 2, 5 und 10.

BEISPIEL: Linus muss für ein Theater-AG-Treffen an seiner Schule Stühle aufstellen. Es werden 30 Schüler erwartet. Auf welche verschiedenen Weisen kann er die Stühle so arrangieren, dass jede Reihe die gleiche Anzahl an Stühlen hat?

MAN KÖNNTE AUCH SAGEN: „FINDE DIE TEILER VON 30."

z. B.: 1 Reihe mit 30 Stühlen
2 Reihen zu je 15 Stühlen
3 Reihen zu je 10 Stühlen
5 Reihen zu je 6 Stühlen
30 Reihen zu je 1 Stuhl

Die Teiler von 30 sind 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 und 30.
Das Produkt jedes Zahlenpaars ist 30.

Teilbarkeitsregeln für Schnellrechner:

Eine Zahl ist immer dann durch 2 teilbar, wenn sie auf eine gerade Ziffer endet (0, 2, 4, 6, 8).

BEISPIELE: 10, 92, 44, 26 und 8 sind alle durch 2 teilbar, weil sie mit einer geraden Ziffer enden.

Eine Zahl ist immer dann durch 3 teilbar, wenn die Summe aller Ziffern (die Quersumme) durch 3 teilbar ist.

BEISPIEL: 42 ist durch 3 teilbar, weil 4 + 2 = 6, und 6 ist durch 3 teilbar.

Eine Zahl ist immer dann durch 4 teilbar, wenn die beiden letzten Ziffern 0 sind oder eine durch 4 teilbare Zahl bilden.

BEISPIEL: 124 ist durch 4 teilbar, weil 24 durch 4 teilbar ist.

Eine Zahl ist immer dann durch 5 teilbar, wenn sie mit 0 oder 5 aufhört.

BEISPIELE: 10, 65 und 2.320 sind alle durch 5 teilbar, weil sie entweder mit 0 oder 5 aufhören.

Eine Zahl ist immer dann durch 6 teilbar, wenn sie auf eine gerade Ziffer endet (0, 2, 4, 6, 8) und außerdem die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist.

BEISPIEL: 96 endet auf eine gerade Ziffer und 9 + 6 = 15; 15 ist durch 3 teilbar. Also ist 96 auch durch 6 teilbar.

Eine Zahl ist immer dann durch 9 teilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern durch 9 teilbar ist.

BEISPIEL: 297 ist durch 9 teilbar, weil $2+9+7=18$, und 18 ist durch 9 teilbar.

Eine Zahl ist immer dann durch 10 teilbar, wenn sie mit 0 aufhört.

BEISPIELE: 50, 110 und 31.330 sind alle durch 10 teilbar, weil sie mit 0 aufhören.

Primzahlen

PRIMZAHLEN sind Zahlen, die nur durch sich selbst und durch 1 ohne Rest teilbar sind – sie besitzen 2 Teiler. Hier ein paar Beispiele für Primzahlen: 2, 3, 7 und 13.

2 IST DIE EINZIGE GERADE PRIMZAHL.

Gemeinsame Teiler

Alle Teiler, die für zwei (oder mehr) Zahlen gleich sind, nennt man GEMEINSAME TEILER.

BEISPIEL: Wie lauten die gemeinsamen Teiler von 12 und 18?

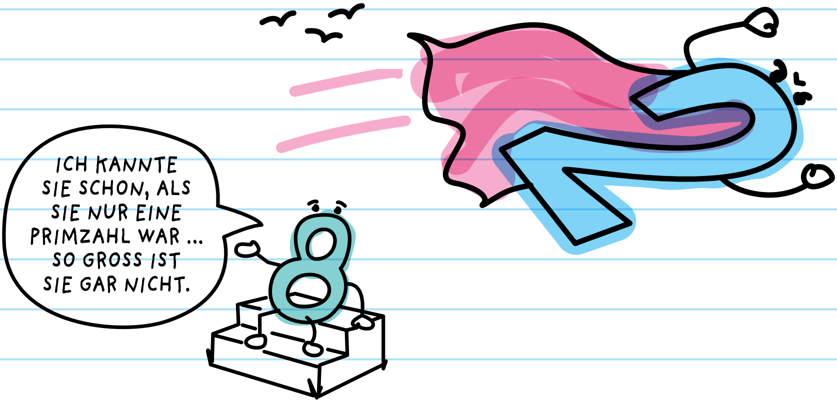
Die Teiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Die Teiler von 18 sind 1, 2, 3, 6, 9, 18.
Die gemeinsamen Teiler von 12 und 18 sind also 1, 2, 3 und 6.

Den größten Teiler, den beide Zahlen gemeinsam haben, nennt man GRÖSSTEN GEMEINSAMEN TEILER oder abgekürzt GGT. Der ggT von 12 und 18 ist 6.

BEISPIEL: Was ist der ggT von 4 und 10?

Die Teiler von 4 sind 1, 2, 4.
Die Teiler von 10 sind 1, 2, 5, 10.

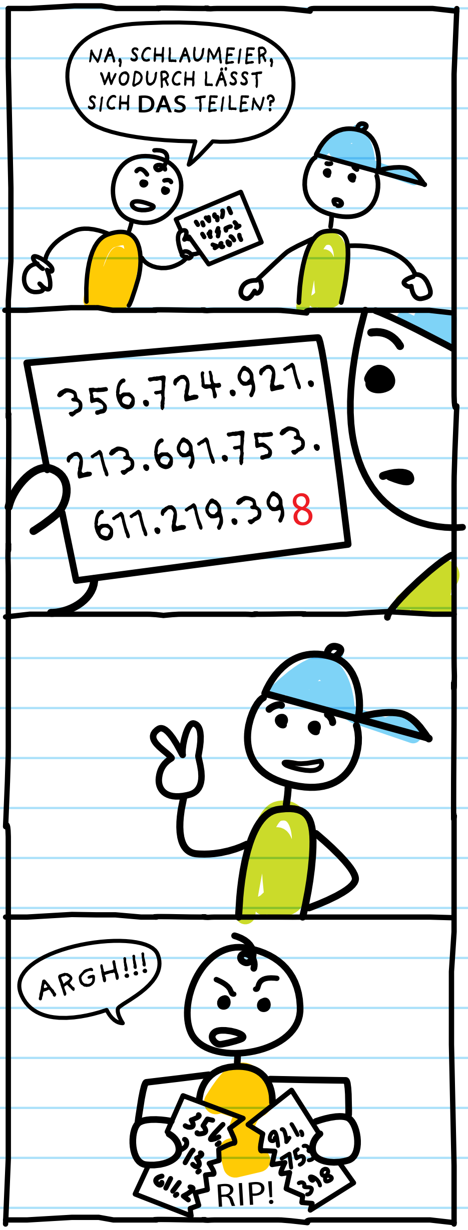
Also ist der ggT von 4 und 10 die 2.



BEISPIEL: Was ist der ggT von 18 und 72?

Die Teiler von 18 sind 1, 2, 3, 6, 9, 18.
Die Teiler von 72 sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

18 ist der ggT von 18 und 72.


NA, SCHLAUMEIER, WODURCH LÄSST SICH DAS TEILEN?
356.724.921.
213.691.753.
611.219.398
ARGH!!!
356,
213,
611,
921,
753,
398
RIP!

PRÜFE DEIN WISSEN

1. Wie lauten die Teiler von 12?

2. Wie lauten die Teiler von 60?

3. Ist 348 durch 2 teilbar?

4. Ist 786 durch 3 teilbar?

5. Ist 936 durch 9 teilbar?

6. Ist 3.645.211 durch 10 teilbar?

7. Finde den ggT von 6 und 20.

8. Finde den ggT von 33 und 74.

9. Finde den ggT von 24 und 96.

10. Lea hat 8 rote Stifte und 20 gelbe Stifte. Sie möchte die Stifte gern auf unterschiedliche Federmäppchen verteilen. Jedes Mäppchen soll die gleiche Anzahl roter und gelber Stifte enthalten und kein Stift soll übrig bleiben. Wie viele Mäppchen kann Lea befüllen?

LÖSUNGEN

LÖSUNGEN

1. 1, 2, 3, 4, 6 und 12
2. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 und 60
3. Ja, weil 348 mit einer geraden Ziffer endet.
4. Ja, weil 7 + 8 + 6 = 21, und 21 ist durch 3 teilbar.
5. Ja, weil 9 + 3 + 6 = 18, und 18 ist durch 9 teilbar.
6. Nein, weil es nicht mit einer 0 aufhört.
7. 2
8. 1
9. 24
10. 4 Mäppchen. (Jedes Federmäppchen enthält 2 rote Stifte und 5 gelbe Stifte.)

Kapitel 5

VIELFACHE UND KLEINSTES GEMEINSAMES VIELFACHES

Sobald wir eine Zahl mit irgendeiner anderen ganzen Zahl multiplizieren (die nicht 0 ist), ist das Produkt ein VIELFACHES dieser Zahl. Jede Zahl hat eine unendliche Liste an Vielfachen.

BEISPIEL: Wie lauten die Vielfachen von 4?

$4 \cdot 1 = 4$
$4 \cdot 2 = 8$
$4 \cdot 3 = 12$
$4 \cdot 4 = 16$

und so weiter ... für immer!
Die Vielfachen von 4 sind 4, 8, 12, 16, ...

Alle Vielfachen, die für zwei (oder mehr) Zahlen gleich sind, nennt man GEMEINSAME VIELFACHE.

BEISPIEL: Wie lauten die Vielfachen von 2 und 5?
Die Vielfachen von 2 sind 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...
Die Vielfachen von 5 sind 5, 10, 15, 20, ...

Bis hierhin haben 2 und 5 die Vielfachen 10 und 20 gemeinsam.

Wie lautet das kleinste Vielfache, das 2 und 5 gemeinsam haben? Das kleinste Vielfache ist 10. Man spricht auch vom KLEINSTEN GEMEINSAMEN VIELFACHEN oder KGV.

Um das kgV von zwei Zahlen herauszufinden, listest du die Vielfachen jeder Zahl vom kleinsten beginnend auf, bis du das erste Vielfache entdeckst, das beide gemeinsam haben.

BEISPIEL: Finde das kgV von 9 und 11.
Die Vielfachen von 9 sind 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, ...
Die Vielfachen von 11 sind 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, ...

99 ist das erste Vielfache, das 9 und 11 gemeinsam haben, das kgV von 9 und 11 ist also 99.

Manchmal ist es einfacher, mit der größeren Zahl anzufangen. Anstatt zuerst alle Vielfachen von 9 aufzulisten, fang mit den Vielfachen von 11 an, und frage dich: Welche dieser Zahlen ist durch 9 teilbar?

BEISPIEL: Emma bietet an, jeden 6. Tag im Tierheim auszuhelfen. Sarah möchte jeden 5. Tag im Heim aushelfen. Wenn beide dies am gleichen Tag anbieten, wann werden sie dann erstmals beide am selben Tag arbeiten?

MAN KÖNNTE AUCH SAGEN: FINDE DAS KGV VON 5 UND 6.

Emma wird an den folgenden Tagen arbeiten: 6., 12., 18., 24. und 30. ...

30 ist die erste Zahl, die durch 5 teilbar ist, das kgV von 5 und 6 ist also 30.

Der erste Tag, an dem Emma und Sarah gemeinsam arbeiten, ist der 30. Tag.

PRÜFE DEIN WISSEN

1. Liste die ersten fünf Vielfachen von 3 auf.
2. Liste die ersten fünf Vielfachen von 12 auf.
3. Finde das kgV von 5 und 7.
4. Finde das kgV von 10 und 11.
5. Finde das kgV von 4 und 6.
6. Finde das kgV von 12 und 15.
7. Finde das kgV von 18 und 36.
8. David geht jeden 3. Tag zum Sport. Tim geht jeden 4. Tag zum Sport. Wenn beide dem Sportclub am gleichen Tag beitreten, wann ist der erste Tag, an dem sie gemeinsam Sport machen?

9. Juna und Anne haben die gleiche Anzahl an Münzen. Juna sortiert ihre Münzen zu **6er**-Stapeln, ohne dass eine Münze übrig bleibt. Anne sortiert ihre Münzen zu **8er**-Stapeln, ohne dass eine Münze übrig bleibt. Was ist die kleinstmögliche Anzahl an Münzen, die jede von ihnen besitzt?

10. Noah und Lina haben gleich viele Blumen. Noah bindet daraus Sträuße zu je **3** Blumen, ohne dass eine Blume übrig bleibt. Linda bindet Sträuße mit jeweils **7** Blumen. Auch bei ihr bleibt keine Blume übrig. Wie viele Blumen hat jeder von ihnen mindestens?

LÖSUNGEN

LÖSUNGEN

1. 3, 6, 9, 12, 15
2. 12, 24, 36, 48, 60
3. 35
4. 110
5. 12
6. 60
7. 36
8. Am 12. Tag
9. 24 Münzen
10. 21 Blumen

Kapitel 6

PRIMFAKTOR-ZERLEGUNG

Primzahlen kennst du bereits. Das sind Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind (z. B. 2, 3, 5, 7, 11, 13 usw.).
Du kannst alle natürlichen Zahlen als Produkt von Primzahlen schreiben – das nennt man PRIMFAKTORZERLEGUNG.

BEISPIEL: Schreibe 14 als Produkt von Primzahlen.

$14 = 2 \cdot 7$

14 ist das Produkt der Primzahlen 2 und 7.

Größere Zahlen „zerlegst" du am besten Stück für Stück. Zerlege sie so lange, bis nur noch Primzahlen als Faktoren übrig bleiben.

BEISPIEL: Schreibe 216 als Produkt von Primzahlen.

Finde zunächst eine Primzahl, durch die 216 teilbar ist. 216 ist durch 3 teilbar, da die Quersumme ($2+1+6=9$) durch 3 teilbar ist. Schreibe also:

$216 = 3 \cdot 72$

Auch 72 ist durch 3 teilbar, schreibe also:

$216 = 3 \cdot 3 \cdot 24$

24 kannst du ebenfalls durch 3 teilen:

$216 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8$

Und 8 kannst du durch die Primzahl 2 teilen:

$216 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4$

Ebenso die 4:

$216 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Weiter kannst du die Faktoren nun nicht mehr zerlegen. Aber du kannst das Ganze kürzer fassen, indem du die Primzahlen als Potenzen schreibst:

$216 = 3^3 \cdot 2^3$

216 ist das Produkt der Primzahlen 3^3 und 2^3.

KgV und Primfaktorzerlegung

Die Primfaktorzerlegung ist besonders hilfreich, wenn du das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) größerer Zahlen möglichst schnell ermitteln möchtest.

BEISPIEL: Finde das kgV von 30 und 36.

Anstatt nun sämtliche Vielfache beider Zahlen aufzulisten und darunter dann das kgV zu suchen, zerlegst du beide Zahlen in Primfaktoren. Zunächst die 30:

$30 = 3 \cdot 10$

$30 = 3 \cdot 2 \cdot 5$

Dann zerlegst du die 36:

$36 = 3 \cdot 12$
$36 = 3 \cdot 3 \cdot 4$
$36 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

In Potenzschreibweise hast du nun also:

$30 = 3^1 \cdot 2^1 \cdot 5^1$
$36 = 3^2 \cdot 2^2$

Die Basen der Primzahlen sind 3, 2 und 5. Nimm nun jeweils die Zahl mit dem höchsten Exponenten: Bei 3^1 und 3^2 ist das 3^2, bei 2^1 und 2^2 ist das 2^2, bei der Basis 5 hast du nur die 5^1.

Multipliziere diese, um das kgV zu errechnen:

kgV $(30, 36) = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^1$
kgV $(30, 36) = 180$

Das kgV von 30 und 36 ist 180.

GgT und Primfaktorzerlegung

Mithilfe der Primfaktorzerlegung kannst du auch den größten gemeinsamen Teiler (ggT) verschiedener Zahlen ermitteln. Besonders bei größeren Zahlen bietet sich diese Methode an.

BEISPIEL: Finde den ggT von 105 und 120.

Anstatt sämtliche Vielfache beider Zahlen aufzulisten und darunter dann den ggT zu suchen, zerlegst du beide Zahlen in Primfaktoren. Zunächst die 105:

$105 = 3 \cdot 35$
$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

Dann zerlegst du die 120:

$120 = 2 \cdot 60$
$120 = 2 \cdot 2 \cdot 30$
$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15$
$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

In Potenzschreibweise hast du nun also:

$105 = 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$
$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

Um den ggT zu berechnen, nimmst du nun die Primfaktoren, die in BEIDEN Primfaktorzerlegungen vorkommen und den jeweils KLEINSTEN Exponenten haben. Das sind die 3^1 und die 5^1. (Die 2^3 und die 7^1 entfallen.)

Diese multiplizierst du miteinander und erhältst so den ggT:

$$ggT(105, 120) = 3^1 \cdot 5^1$$
$$ggT(105, 120) = 15$$

Der ggT von 105 und 120 ist 15.

PRÜFE DEIN WISSEN

1. Schreibe 18 als Produkt von Primzahlen.
2. Schreibe 40 als Produkt von Primzahlen.
3. Schreibe 100 als Produkt von Primzahlen.
4. Ermittle das kgV von 4 und 6.
5. Ermittle das kgV von 6 und 18.
6. Ermittle das kgV von 21 und 42.
7. Ermittle den ggT von 104 und 112.
8. Ermittle den ggT von 114 und 285.
9. Ermittle den ggT von 275 und 325.

LÖSUNGEN

LÖSUNGEN

1. $2 \cdot 3^2$
2. $2^3 \cdot 5$
3. $2^2 \cdot 5^2$
4. 12
5. 18
6. 42
7. 8
8. 57
9. 25

Kapitel 7

BRÜCHE ADDIEREN UND SUBTRAHIEREN

BRUCHRECHNUNGS-BASICS

Um den Teil eines Ganzen zu beschreiben, benutzt man Brüche. Ein Bruchstrich trennt den Teil vom Ganzen auf diese Weise:

$$\frac{\text{TEIL}}{\text{GANZES}}$$

Der „Teil" wird ZÄHLER genannt, und das „Ganze" nennt man NENNER.

Stell dir vor, du schneidest eine ganze Pizza in 6 Stücke und isst 5 davon. Der „Teil", den du gegessen hast, ist 5, und das „Ganze", mit dem du angefangen hast, ist 6. Daher beträgt die Menge, die du gegessen hast, $\frac{5}{6}$ der Pizza.

Wenn sich 3 Kinder eine in 8 Stücke geschnittene Pizza teilen, sodass jedes Kind 2 Stücke bekommt, bleiben 2 Stücke übrig. Diese übrig gebliebenen Stücke nennt man den REST.

REST:
nach einer Division übrig bleibender Teil

Es gibt 3 Arten von Brüchen:

1. Echte Brüche: Der Zähler ist kleiner als der Nenner.

BEISPIELE: $\frac{5}{6}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{1.000}$ $-\frac{4}{27}$

2. Unechte Brüche: Der Zähler ist größer als oder gleich dem Nenner.

BEISPIELE: $\frac{10}{3}$ $\frac{8}{8}$ $-\frac{25}{5}$

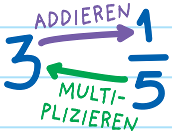
3. Gemischte Zahlen: Sie bestehen aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch.

BEISPIELE: $2\frac{2}{3}$, $18\frac{1}{8}$, $-9\frac{5}{7}$

UMWANDLUNG von GEMISCHTEN ZAHLEN in UNECHTE BRÜCHE

Merke: Um **EINE GEMISCHTE ZAHL IN EINEN UNECHTEN BRUCH UMZUWANDELN**, musst du zuerst multiplizieren und dann addieren.

BEISPIEL: Um die gemischte Zahl $3\frac{1}{5}$ in einen unechten Bruch umzuwandeln, rechne zuerst $3 \cdot 5$, das Ergebnis ist 15. Rechne dann $15+1$ und du erhältst 16. Der unechte Bruch lautet demnach $\frac{16}{5}$.



Um **EINEN UNECHTEN BRUCH IN EINE GEMISCHTE ZAHL UMZUWANDELN**, dividierst du den Zähler durch den Nenner. Überlege dabei: Wie oft passt der Nenner in den Zähler? Welcher Rest bleibt übrig?

BEISPIEL: Um den unechten Bruch $\frac{23}{8}$ in eine gemischte Zahl umzuwandeln, rechnest du:

$23 : 8 = 2 \; R7$, die gemischte Zahl lautet also $2\frac{7}{8}$.

„R“ STEHT FÜR REST

Wenn du bei einer Rechenaufgabe einen unechten Bruch als Ergebnis erhältst, rechne ihn abschließend immer in eine gemischte Zahl um. Das verlangen die meisten Lehrer so!

BRÜCHE VEREINFACHEN

Manchmal haben der Zähler und der Nenner gemeinsame Teiler. Du kannst einen Bruch VEREINFACHEN, indem du den Zähler und den Nenner durch den größten gemeinsamen Teiler dividierst. Man spricht auch vom KÜRZEN der Brüche.

BEISPIEL: $\frac{6}{10}$ kann vereinfacht werden zu $\frac{3}{5}$, weil 2 der ggT von 6 und 10 ist.

$$\frac{6}{10} = \frac{6:2}{10:2} = \frac{3}{5}$$

BEISPIEL: $\frac{20}{8}$ kann vereinfacht werden zu $\frac{5}{2}$, weil 4 der ggT von 20 und 8 ist.

$$\frac{20}{8} = \frac{20:4}{8:4} = \frac{5}{2}$$

Brüche solltest du, wenn möglich, immer vereinfachen (kürzen).

BRÜCHE ADDIEREN

Wenn wir Brüche miteinander addieren wollen, müssen die Nenner gleich sein.

BEISPIEL: $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$

In der Summe bleibt der Nenner der gleiche und du addierst bloß die Zähler. Beispielsweise hast du zwei identische Schokoriegel, und du brichst sie beide jeweils in 5 Stücke.